Развитие макроскопической теории поляризационного излучения

Д.В. Карловец, А.П. Потылицын

Поляризационное излучение в м*и*кроскопической теории:

Излучение мультипольных моментов, возникающих в сложной системе (атом, молекула) при столкновении с заряженной частицей - «Atomic Bremsstruhlung», «Polarization radiation», См., например: M. Ya. Amusia, Rad. Phys. Chem. 75, 1232 (2006).

Поляризационное излучение в м*а*кроскопической теории:

Излучение мультипольных моментов, возникающих в сплошной среде, под воздействием поля заряженной частицы:

Излучение Черенкова, переходное излучение, дифракционное излучение, излучение Смита-Парселла, параметрическое рентгеновское излучение и др.

Обычная формулировка макроскопической электродинамики:

$$\partial_\nu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_e^\mu \longrightarrow \partial_\nu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_e^\mu + \frac{4\pi}{c} j_{pol}^\mu$$

где $$j_{pol}^\mu = j_{pol}^\mu(H^{\mu\nu}) \equiv j_{pol}^\mu(H_0^{\mu\nu} + H_{pol}^{\mu\nu})$$ - линейная функция полного поля

Для среды только с частотной дисперсией:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},\omega)_{\mathrm{pol}} = \sigma(\mathbf{r},\omega)(\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{\mathrm{pol}}(\mathbf{j}_{\mathrm{pol}}))$$

где $$\sigma(\mathbf{r},\omega) = \frac{\omega}{4\pi i}(\varepsilon(\mathbf{r},\omega) - 1)$$

отсюда

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},\omega) = \mathbf{j}_{pol}(\mathbf{r},\omega)/(-i\omega)$$ - объемная плотность наведенного дипольного момента

Для однородной и изотропной среды (мишени заданной формы):

$$\left(\Delta + \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r},\omega) = -\frac{4\pi}{c}\sigma(\omega)\mathrm{rot}\mathbf{E}^0$$

отсюда:

$$\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r},\omega) = \mathbf{rot}\frac{1}{c}\int\limits_{V_\mathbf{r}} \sigma(\omega)\mathbf{E}^0(\mathbf{r}',\omega)\frac{e^{i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$$

Или вычисляя ротор:

$$\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{c}\int\limits_{V_\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \sigma(\omega)\mathbf{E}^0(\mathbf{r},\omega)$$

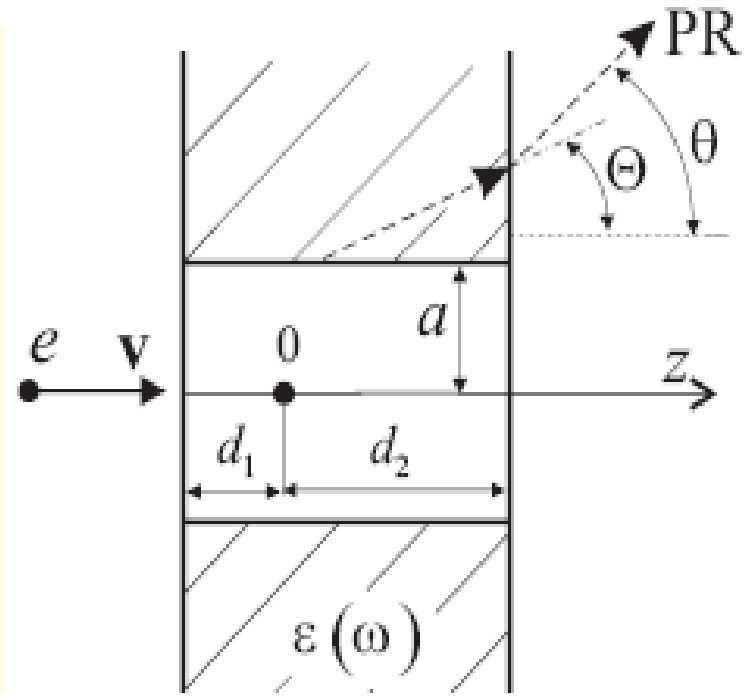
$$\times\left(i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\frac{\omega}{c} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\frac{e^{i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$$

Аналогично и для электрического поля

1. Поляризационное излучение в цилиндрическом канале:

$$\mathbf{H}^R(\mathbf{r},\omega) = \frac{e\omega^2(\varepsilon-1)}{4\pi^2 v^2 c\gamma}\frac{e^{ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c}}{r}\mathbf{k}\times\int\limits_a^\infty \rho' d\rho' \int\limits_0^{2\pi} d\phi' \int\limits_{-d_1}^{d_2} dz' \left(\frac{\rho'}{\rho'}K_1\left[\frac{\omega\rho'}{v\gamma}\right] - \frac{i}{\gamma}\frac{\mathbf{v}}{v}K_0\left[\frac{\omega\rho'}{v\gamma}\right]\right)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'+i\frac{\omega}{v}z'}$$

где: $\mathbf{H}^R(\mathbf{r},\omega)$ - «волновая» часть $\mathbf{H}^{pol}(\mathbf{r},\omega)$



Для нулевой ширины канала:

$$\frac{dW}{d\omega} = \int \frac{cr^2}{\sqrt{\varepsilon}}|\mathbf{H}^R|^2 d\Omega = \frac{2e^2\beta^2}{\pi c}\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{v}(1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)\right)}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)^2}\left[\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)}{1-\beta^2+(\beta\sqrt{\varepsilon}\sin\Theta)^2}\right]^2\sin^3\Theta d\Theta$$

Для «толстого» слоя:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{v}(1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)\right)}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)^2} \to \to \frac{d}{2}\frac{\omega}{v}\pi\,\delta\left(1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta\right)$$

$$\frac{1}{d}\frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2}{c^2}\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2\varepsilon(\omega)}\right)$$

Ф-ла Тамма-Франка для излучения Черенкова!

Энергия, излученная в вакуум

В общем случае:

$$\mathbf{H}^R(\mathbf{r},\omega) = \frac{e\omega\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon-1)a}{2\pi vc\gamma^2}\frac{e^{ir\sqrt{\varepsilon}\omega/c}}{r}\frac{e^{-id_1\frac{\omega}{c}(\beta^{-1}-\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)} - e^{id_2\frac{\omega}{c}(\beta^{-1}-\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)}}{(\beta^{-1}-\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)(1-\beta^2+(\beta\sqrt{\varepsilon}\sin\Theta)^2)}\{\sin\phi, -\cos\phi, 0\}$$

$$\times\left(\sin\Theta(\gamma^{-1}-\beta\gamma\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta)J_0\left(a\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\Theta\right)K_1\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right) - (\cos\Theta+\beta\sqrt{\varepsilon}\sin^2\Theta)J_1\left(a\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\sin\Theta\right)K_0\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right)\right)$$

Теорема взаимности:

$$(\mathbf{E}^{\mathrm{pol(vac)}}, \mathbf{d}^{(\mathrm{vac})}) = (\mathbf{E}^{\mathrm{pol}(m)}, \mathbf{d}^{(m)})$$

А также закон Снеллиуса:

$$|\mathbf{E}^{\mathrm{pol(vac)}}| = \frac{\sin\theta_m}{\sin\theta}|\mathbf{E}^{\mathrm{pol}(m)}| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\mathbf{E}^{\mathrm{pol}(m)}|.$$

В итоге:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = cr^2\left|\mathbf{E}^{\mathrm{pol(vac)}}\right|^2$$

$$= \frac{e^2}{\pi^2 c}\frac{\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|e^{-id\frac{\omega}{c}\left(\beta^{-1}-\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)} - 1\right|^2\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right)^2\left|\frac{\varepsilon-1}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\times\right.$$

$$\left.\left(\sin\theta(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})J_0\left(a\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)K_1\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right) - \gamma^{-1}(\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}+\beta\sin^2\theta)J_1\left(a\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)K_0\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right)\right)\right|^2$$

В пределе полупространства:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \to \frac{e^2}{\pi^2 c}\frac{\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\right|^2$$

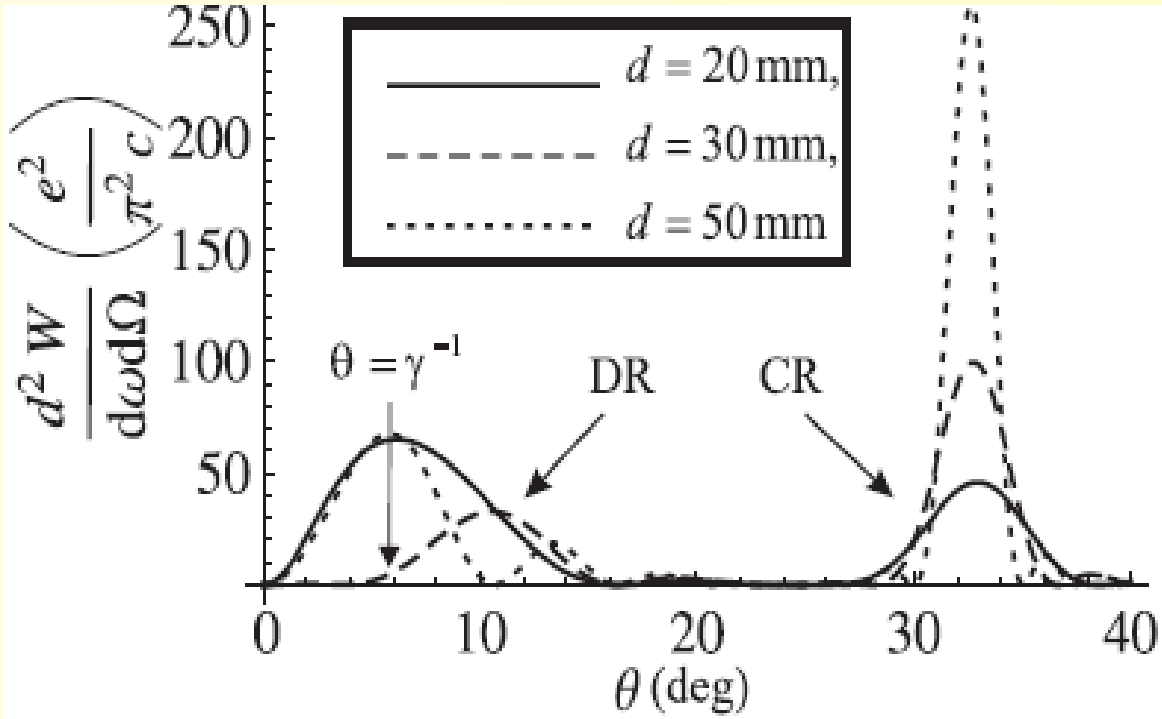
Ф-ла Гинзбурга-Франка для переходного излучения!

В пределе идеальной проводимости:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \to \frac{e^2}{\pi^2 c}\frac{\beta^2\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left(\frac{a\omega}{v\gamma}\right)^2\left(J_0\left(a\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)K_1\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right)+\frac{1}{\beta\gamma\sin\theta}J_1\left(a\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)K_0\left(a\frac{\omega}{v\gamma}\right)\right)^2$$

Ф-ла Днестровского-Костомарова для дифракционного излучения!

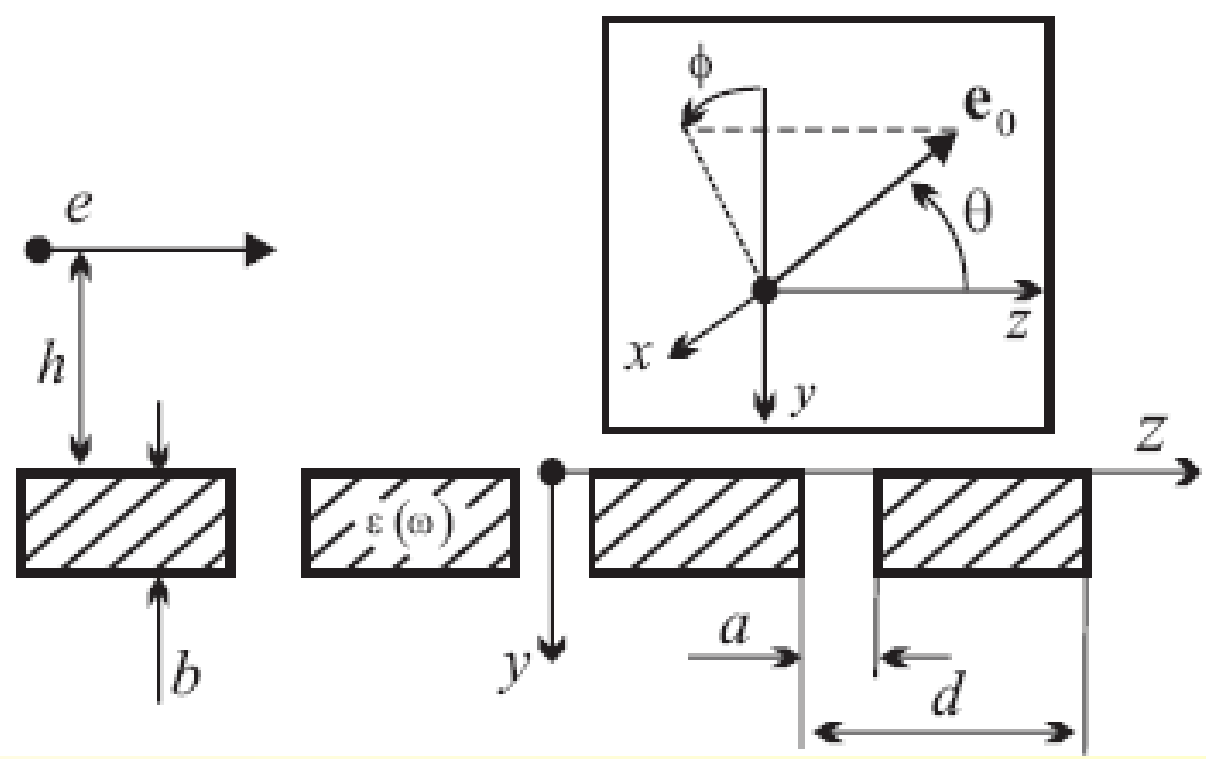
В общем случае



$$\gamma = 10, \lambda = 1\text{mm}, a = 1\text{mm},$$
$$\varepsilon' = 1.3, \varepsilon'' = 10^{-3}.$$

2. Поляризационное излучение на решетке

$$a \ll \lambda, b \ll d$$



Итоговый результат:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c}\frac{(\beta\sin\theta\cos\phi)^2}{(1-\beta^2+(\beta\sin\theta\sin\phi)^2)(1-(\sin\theta\cos\phi)^2)}\frac{\sin^2\left(\frac{d-a}{2}\frac{\omega}{c}(\frac{1}{\beta}-\cos\theta)\right)}{(1-\beta\cos\theta)^2}\frac{\sin^2\left(N\frac{d}{2}\frac{\omega}{c}(\frac{1}{\beta}-\cos\theta)\right)}{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{c}(\frac{1}{\beta}-\cos\theta)\right)}\times$$

$$\left|\frac{(\varepsilon-1)(\exp\{-b\frac{\omega}{v\gamma}(\sqrt{1+(\beta\gamma\sin\theta\sin\phi)^2}-i\beta\gamma\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2})\}-1)}{\sqrt{1+(\beta\gamma\sin\theta\sin\phi)^2}-i\beta\gamma\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2}}\right|^2\times$$

$$\left(\left|\frac{(\gamma^{-1}\cos\theta+\beta\gamma(\sin\theta\sin\phi)^2)\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2}+i(1-(\sin\theta\cos\phi)^2)\sqrt{1+(\beta\gamma\sin\theta\sin\phi)^2}}{\varepsilon\sin\theta\cos\phi+\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2}}\right|^2\right.$$

$$\left.+(\sin\theta\sin\phi)^2(\gamma^{-1}-\beta\gamma\cos\theta)^2\frac{1-(\sin\theta\cos\phi)^2+|\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2}|^2}{|\sqrt{\varepsilon}(\sin\theta\cos\phi+\sqrt{\varepsilon-1+(\sin\theta\cos\phi)^2})|^2}\right)e^{-h\frac{2\omega}{v\gamma}\sqrt{1+(\beta\gamma\sin\theta\sin\phi)^2}}.$$

Для большого числа периодов:

$$\frac{\sin^2\left(N\frac{d}{2}\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-\cos\theta\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{d}{2}\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-\cos\theta\right)\right)} \to$$

$$\to 2\pi N\sum_{m=1}^{\infty}\delta\left(d\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-\cos\theta\right)-2\pi m\right)$$

$$\lambda_m = \frac{d}{m}\left(\frac{1}{\beta}-\cos\theta\right)$$

Дисперсионное соотношение Смита-Парселла
(m — порядок дифракции)

Для бесконечной плоскости:

$$\frac{\sin\left(\frac{d-a}{2}\left(\frac{\omega}{v}-k_z\right)\right)}{\frac{\omega}{v}-k_z} \to \pi\delta\left(\frac{\omega}{v}-k_z\right)$$

$$\frac{1}{\beta}-\cos\theta \neq 0$$

Нет излучения!

В пределе идеальной проводимости для большого числа периодов:

$$\frac{1}{N}\frac{dW_m}{d\Omega} = \frac{2e^2\beta}{\pi d}R(\gamma,\theta,\phi)\frac{\sin^2\left(\pi m\frac{d-a}{d}\right)}{(1-\beta\cos\theta)^3}\times$$

$$e^{-h\frac{4\pi}{\beta\gamma\lambda_m}\sqrt{1+(\beta\gamma\sin\theta\sin\phi)^2}},$$

Причем:

$$R(\gamma,\theta,\phi) \to (\beta\sin\theta)^2 \quad \text{при} \quad \gamma\to\infty$$

Ф-ла Броунелла-Уолша-Доукаса для излучения Смита-Парселла!

3. Поляризационное излучение на конечных расстояниях

Обозначим: $\mathbf{j}^{pol(0)} = \sigma(\omega)\mathbf{E}^0(\mathbf{r},\omega)$

Из ур-ий Максвелла:

$$\mathbf{E}^{pol}(\mathbf{r},\omega) = \frac{ic}{\omega\varepsilon(\omega)}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^{pol} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{pol(0)}\right)$$

В итоге:

$$\mathbf{E}^{pol}(\mathbf{r},\omega) = \frac{i}{\omega\varepsilon(\omega)}\int\limits_{V_T}\left\{\mathbf{j}^{pol(0)}(\mathbf{r}',\omega)\left(\varepsilon(\omega)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega/c}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right) - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\mathbf{j}^{pol(0)}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\varepsilon(\omega)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{3i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega/c}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right)\right\}\frac{e^{i\sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' + \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1\right)\mathbf{E}^0(\mathbf{r},\omega).$$

На близких расстояниях: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda/\sqrt{\varepsilon(\omega)}.$

$$\mathbf{E}^{pol} \approx \mathbf{E}^{stat} = \frac{i}{\omega\varepsilon(\omega)}\int\limits_{V_T}\left(3\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\mathbf{j}^{pol(0)}\right) - \mathbf{j}^{pol(0)}\right)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3r' + \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1\right)\mathbf{E}^0(\mathbf{r},\omega)$$

$$\mathbf{H}^{pol} \approx \mathbf{H}^{stat} = 0.$$

Статическое поле дипольных моментов

«Кильватерное» поле

Приложения теории поляризационного излучения:

1. Разработка новых типов источников излучения от гамма- до СВЧ-диапазонов, в том числе на основе:

а.) использования современных плазменных ускорителей
[см., например: G.L. Carr et al., Nature **420**, 153 (2002);
J. van Tilborg et al., Phys. Rev. Letters **96**, 014801 (2006)],

б.) использования фотонных кристаллов и мета-материалов:
[см., например: K. Yamamoto, Phys. Rev. E **69**, 045601(R) (2004);
Sheng Xi et al., Phys. Rev. Letters **103**, 194801 (2009)],

в.) нового типа лазеров на свободных электронов
на излучении Смита-Парселла или черенковском излучении
[см., например: H.L. Andrews et al., New J. Phys. **8**, 289 (2006);
H.L. Andrews et al., J. Appl. Phys. **101**, 104904 (2007)].

2. Неразрушающий контроль и диагностика поверхностных структур (вплоть до нано-диапазона), параметров пучков современных ускорителей, в том числе на основе:

а.) когерентного переходного излучения, дифракционного излучения,
излучения Смита-Парселла, черенковского излучения и т.п.
[см., например: P.V. Karataev et al., Phys. Rev. Letters **93**, 244802 (2004);
V. Blackmore et al., Phys. Rev. Spec. Topics — Accel. Beams **12**, 032803 (2009),]

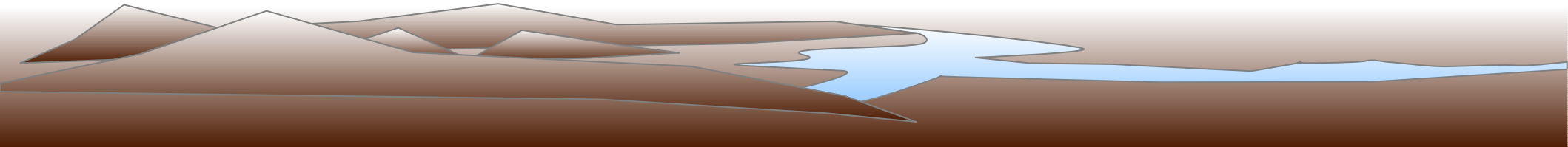
б.) «кильватерных» полей (wake fields)
[см., например: S.V. Shchelkunov et al., Phys. Rev. Spec. Topics
— Accel. Beams **8**, 062801 (2005),
R.A. Bosch et al., Phys. Rev. Spec. Topics — Accel. Beams **11**, 100704 (2008)].

Заключение

- Различные типы излучения, возникающие при взаимодействии движущихся заряженных частиц с конденсированной средой, являются проявлениями одного и того же *поляризационного* механизма генерации.

- Точное решение ур-й Максвелла позволяет одновременно рассматривать различные типы поляризационного излучения и «честно» учитывать реальные диэлектрические свойства среды.

- Такое «универсальное» описание имеет большую значимость для современных приложений поляризационного излучения.

Подробности доступны также в:

1. Письма в ЖЭТФ **90**, 368 (2009);
2. arXive: 0908.2336.v2